

## EQUATION GENERALISEE DU TOUCHAU AMELIORATION DE LA METHODE DE MESURE DE L'EFFUSIVITE THERMIQUE\*

DANIEL BALAGEAS et DOMINIQUE ORY

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, rue de la Division Leclerc,  
 92320 Châtillon sous Bagneux, France

(Reçu le 14 juin 1979)

**Résumé** – La méthode de mesure de l'effusivité thermique la plus courante est la méthode du touchau. Une généralisation de la théorie sur laquelle repose cette méthode est proposée. Les transferts thermiques existants entre la sonde et l'extérieur ne sont plus négligés. Dans ces conditions, la méthode du touchau déjà modifiée précédemment par l'utilisation des coïncidences locales, peut alors être utilisée avec une précision accrue. L'utilisation de sondes miniaturisées de technologie relativement rustique est rendue possible.

Dans le domaine bio-médical, la nouvelle méthode a permis de montrer que, lors de la mesure *in vivo* de l'effusivité de la peau, l'état circulatoire sous-cutané n'était pas perturbé par le signal thermique généré par l'application de la sonde.

### NOMENCLATURE

<p><math>A</math>, Aire de la surface <math>S</math> [<math>m^2</math>];</p> <p><math>C</math>, chaleur spécifique massique [<math>J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}</math>];</p> <p><math>R</math>, résistance thermique par unité de surface [<math>^\circ C \cdot m^2 \cdot W^{-1}</math>];</p> <p><math>R^*</math>, résistance thermique fictive associée à la température corrigée <math>T^*</math>, définie par la relation (26) [<math>^\circ C \cdot m^2 \cdot W^{-1}</math>];</p> <p><math>S</math>, surface délimitant la sonde [<math>m^2</math>];</p> <p><math>T</math>, température de la sonde dans une échelle de température dont le zéro est la température initiale du milieu semi-infini [<math>^\circ C</math>];</p> <p><math>T^*</math>, température corrigée des pertes, définie par la relation (23) [<math>^\circ C</math>];</p> <p><math>V</math>, volume de la sonde [<math>m^3</math>];</p> <p><math>a</math>, diffusivité thermique, <math>a = k/\rho \cdot C</math> [<math>m^2 \cdot s^{-1}</math>];</p> <p><math>b</math>, effusivité thermique, <math>b = (k \cdot \rho \cdot C)^{1/2}</math> [<math>J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1/2} \cdot ^\circ C^{-1}</math>];</p> <p><math>erfc(u) = e^{-u^2} \cdot erfc(u)</math>;</p> <p><math>h</math>, coefficient d'échanges radiato-convectifs [<math>W \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}</math>];</p> <p><math>k</math>, conductivité thermique [<math>W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}</math>];</p> <p><math>\rho</math>, paramètre de Laplace;</p> <p><math>t</math>, temps [s];</p> <p><math>x</math>, profondeur dans le milieu semi-infini [m].</p>	<p><math>\rho</math>, masse spécifique [<math>kg \cdot m^{-3}</math>];</p> <p><math>\sigma</math>, rapport de l'aire des surfaces arrière et latérale à la surface frontale de la sonde, <math>\sigma = A_1/A_f</math>;</p> <p><math>\theta</math>, température réduite de la sonde, <math>\theta = T(t)/T(0)</math>.</p>
---	---

### Indices

<p><math>T</math>, touchau;</p> <p><math>a</math>, ambiant;</p> <p><math>f</math>, frontal;</p> <p><math>l</math>, latéral et arrière;</p> <p><math>0</math>, initial.</p>
--

### INTRODUCTION

L'EFFUSIVITÉ thermique,  $b$ , encore appelée inertie thermique, est une propriété thermophysique importante. La méthode de mesure de l'effusivité la plus couramment utilisée est celle dite du "touchau". Elle a été proposée par Vernotte, [1]. Le principe en est simple: une masse très bonne conductrice de la chaleur est mise brusquement en contact avec le milieu semi-infini à caractériser. L'évolution de la température de cette masse, supposée isotherme et isolée du milieu ambiant, permet de déduire la valeur de l'effusivité du milieu semi-infini. Dans ce milieu, les transferts thermiques sont supposés monodimensionnels. Le contact thermique entre la sonde et le milieu peut être soit parfait, soit caractérisé par une résistance thermique par unité de surface,  $R_f$ , non nulle. La référence [1] présente les théories correspondant à ces deux cas. Une démonstration plus simple de la théorie du touchau en contact imparfait a été présentée depuis dans la référence [2]. La résistance  $R_f$  est calculée conjointement à l'effusivité. La méthode de Vernotte est une méthode de superposition globale du thermogramme à une courbe théorique. Balageas [3], a proposé une méthode

### Symboles grecs

<p><math>\Delta</math>, <math>= 1 + 4 \varphi_1 \cdot \sigma \cdot \gamma/b^2</math>;</p> <p><math>\psi</math>, densité de flux conductif entrant dans le milieu semi-infini [<math>W \cdot m^{-2}</math>];</p> <p><math>\Theta</math>, température dans le milieu semi-infini [<math>^\circ C</math>];</p> <p><math>\varphi</math>, densité de flux énergétique à travers la surface <math>S</math> [<math>W \cdot m^{-2}</math>];</p> <p><math>\gamma</math>, capacité calorifique par unité de surface de contact [<math>J \cdot ^\circ C^{-1} \cdot m^{-2}</math>];</p>
---

\* An English translation of this paper is available upon request from the authors.

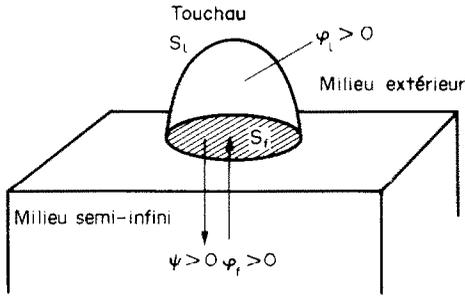


FIG. 1. Schématisation du touchau.

dérivée que l'on peut appeler méthode des coïncidences locales, qui étend l'application de la méthode aux milieux stratifiés (propriétés thermiques fonctions d'une variable d'espace), ainsi qu'au cas plus général d'un contact entre sonde et milieu variable dans le temps ( $R_f = f(t)$ ). Dans ces conditions, une application très importante de la méthode s'est révélée être la détermination des propriétés thermiques des tissus vivants, et plus particulièrement de la peau.

Le présent travail est une généralisation des théories précédentes, reposant essentiellement sur la prise en compte des échanges thermiques parasites existant inévitablement dans la réalité entre le touchau et le milieu extérieur ambiant ou entre le touchau et son anneau de garde. Les conséquences pratiques sur la mesure de l'effusivité sont importantes: précision accrue et simplification des sondes.

### 1. Equation générale du touchau avec déperditions parasites

L'élément de mesure de la sonde est une masse métallique très bonne conductrice de la chaleur (cuivre par exemple) que l'on peut supposer toujours isotherme. Cette masse est de forme quelconque, mais possède une surface plane,  $S_f$ , laquelle elle peut être mise en contact avec un milieu semi-infini dont on veut déterminer l'effusivité (voir Fig. 1). Soit  $A_f$  l'aire de cette surface frontale. L'ensemble des autres surfaces de la sonde,  $S_b$ , a pour aire  $A_l$ . Le rapport de ces deux aires,  $\sigma$ , constitue un paramètre constructif important de la sonde:  $\sigma = A_l/A_f$ . Soit par ailleurs  $\rho_T$  et  $C_T$  la masse spécifique et la chaleur spécifique massique du matériau constituant la sonde, et soit  $V_T$  le volume de cette sonde. Le second paramètre caractérisant la sonde est la capacité calorifique par unité de surface de contact avec le milieu semi-infini,  $\gamma$ :  $\gamma = \rho_T \cdot C_T \cdot V_T/A_f$ . La sonde est entièrement caractérisée thermiquement par ce couple de paramètres,  $\sigma$  et  $\gamma$ .

Soit  $T_T$  la température de la sonde dans une échelle dont le zéro est la température initiale du milieu semi-infini,  $\Theta(x, 0) = \Theta_0$ . Avant la mise en contact avec le milieu semi-infini, la sonde est dans un état thermique stationnaire:

$$\rho_T \cdot C_T \cdot V_T \cdot \left[ \frac{dT_T}{dt} \right]_0 = \varphi_f \cdot A_f + \varphi_l \cdot A_l = 0.$$

Dans le cas particulier où la sonde est à la température du milieu ambiant, on a de plus:

$$T_T^0 = T_a \quad \text{et} \quad \varphi_f = \varphi_l = 0.$$

Après la mise en contact du touchau avec le milieu semi-infini, le bilan thermique s'écrit:

$$\rho_T \cdot C_T \cdot V_T \cdot \left[ \frac{dT_T}{dt} \right] = \varphi_f \cdot A_f + \varphi_l \cdot A_l. \quad (1)$$

La température  $\Theta$  dans un milieu semi-infini à la limite duquel est imposé un flux de densité  $\psi(t)$  s'obtient par application du théorème de Duhamel:

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \quad (2)$$

En particulier, sur la surface où est imposé le flux:

$$\Theta(0, t) = \frac{1}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau. \quad (3)$$

L'application de la sonde se traduit pour le milieu semi-infini par l'imposition d'un flux instationnaire de densité  $\psi(t) = -\varphi_f(t)$  vérifiant l'équation de conservation de l'énergie du touchau, (1), que l'on peut écrire:

$$\gamma \cdot \frac{dT_T}{dt} = \varphi_f + \sigma \cdot \varphi_l. \quad (4)$$

1.1. *Cas du contact thermique parfait entre le touchau et le milieu semi-infini.* Si le contact thermique entre le touchau et le milieu semi-infini est parfait:

$$T_T(t) = T(t) = \Theta(0, t)$$

et l'équation (3), compte-tenu de (4), s'écrit:

$$T(t) + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau - \frac{\sigma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{\varphi_l(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0. \quad (5)$$

L'équation (5) est vérifiée à chaque instant par la sonde, en contact parfait avec le milieu semi-infini d'effusivité  $b$ , et échangeant avec l'extérieur, à travers ses surfaces latérales et arrières,  $S_b$ , un flux de densité moyenne  $\varphi_l$ .

1.1.1. *Cas d'échanges parasites négligeables* - Dans le cas particulier où les échanges parasites sont négligeables ( $\varphi_l \approx 0$ ), l'équation (5) se ramène à:

$$T(t) + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0. \quad (6)$$

C'est l'équation du touchau idéal: contact parfait avec le milieu semi-infini, et isolement parfait avec le milieu ambiant. Vernotte, [1], a établi le premier la solution de l'équation (6):

$$\frac{T(t)}{T(0)} = \operatorname{erfc} \left( \frac{b}{\gamma} \sqrt{t} \right). \quad (7)$$

1.1.2. *Cas d'échanges parasites constants* - Dans le cas où les pertes latérales et arrières sont constantes à

partir du moment de l'application du touchau sur le milieu semi-infini, l'équation (5) s'écrit, en posant  $\varphi_l(t) = \varphi_0$ , et en introduisant la variable réduite  $\theta$ , définie par

$$\theta = T(t)/T(0)$$

avec  $0 \leq \theta \leq 1$ :

$$\theta + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{d\theta}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} - \frac{\sigma}{b\pi^{1/2}} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = 0. \quad (8)$$

Cette équation peut se résoudre par la transformation de Laplace. Si l'on appelle  $F(p)$  la transformée de la fonction  $\theta(t)$ , l'équation (8) conduit à l'équation suivante vérifiée par la fonction  $F(p)$ :

$$F(p) = \frac{1}{p^{1/2} \left( p^{1/2} + \frac{b}{\gamma} \right)} + \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \cdot \frac{1}{p^{3/2} \left( p^{1/2} + \frac{b}{\gamma} \right)} \quad (9)$$

d'où l'expression de la température du touchau en contact parfait avec le milieu semi-infini et avec des pertes constantes:

$$\theta = \operatorname{exerfc} \left( \frac{b}{\gamma} t^{1/2} \right) + \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \int_0^t \operatorname{exerfc} \left( \frac{b}{\gamma} \tau^{1/2} \right) d\tau \quad (10)$$

qui conduit à l'expression finale:

$$\theta = \operatorname{exerfc} \left( \frac{b}{\gamma} t^{1/2} \right) + \frac{\varphi_0}{T_0} \cdot \frac{\sigma \cdot \gamma}{b^2} \times \left[ \operatorname{exerfc} \left( \frac{b}{\gamma} t^{1/2} \right) + \frac{2}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{b}{\gamma} t^{1/2} - 1 \right] \quad (11)$$

qui est la somme de deux termes. Le premier est l'expression de la température du touchau idéal, (7), le second traduit la perturbation du thermogramme entraînée par l'existence des pertes latérales et arrières. Ce terme est proportionnel à la densité du flux de perte,  $\varphi_0$ , et inversement proportionnel à l'écart initial de température entre la sonde et le milieu semi-infini,  $T_0$ . Lorsque les pertes tendent vers zéro l'expression (11) tend vers l'expression (7).

1.1.3. *Cas de pertes radiato-convectives* – Un autre cas intéressant et plus réaliste est celui des pertes radiato-convectives qui, dans une plage de température limitée, peuvent être estimées proportionnelles à la différence de température entre la sonde et l'extérieur. On peut alors écrire:

$$\varphi_l(t) = h[T(t) - T_a] \quad (12)$$

$h$  étant le coefficient radiato-convectif, constant, et négatif compte-tenu des conventions de signe adoptées pour les flux. On peut encore écrire:

$$\varphi_l(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot T(t) \quad (13)$$

avec  $\varphi_0 = -h \cdot T_a$  et  $\varphi_1 = h$ .

L'équation (5) s'écrit dans ce cas:

$$\theta + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{d\theta}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} - \frac{2\sigma}{b\pi^{1/2}} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} t^{1/2} - \frac{\sigma}{b\pi^{1/2}} \cdot \varphi_1 \int_0^t \frac{\theta(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0. \quad (14)$$

L'utilisation de la transformation de Laplace conduit pour la transformée  $F(p)$  à l'expression suivante:

$$F(p) = \frac{\gamma}{b} \cdot \frac{1}{\Delta^{1/2}} \left\{ \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \cdot \frac{1}{p} \times \left[ \frac{1}{p^{1/2} + \frac{b}{2\gamma}(1-\Delta^{1/2})} - \frac{1}{p^{1/2} + \frac{b}{2\gamma}(1+\Delta^{1/2})} \right] + \left[ \frac{1}{p^{1/2} + \frac{b}{2\gamma}(1-\Delta^{1/2})} - \frac{1}{p^{1/2} + \frac{b}{2\gamma}(1+\Delta^{1/2})} \right] \right\} \quad (15)$$

$$\text{avec } \Delta = 1 + 4 \frac{\sigma \cdot \gamma}{b^2} \cdot \varphi_1 = 1 + 4 \frac{\sigma \cdot \gamma}{b^2} \cdot h.$$

D'où l'expression finale de la température  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \operatorname{exerfc} \left[ \frac{b}{\gamma} t^{1/2} \left( \frac{1+\Delta^{1/2}}{2} \right) \right] \times \left[ \left( \frac{1+\Delta^{1/2}}{2\Delta^{1/2}} \right) + \frac{\sigma \cdot \gamma}{b^2} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \cdot \frac{1}{\Delta^{1/2} \left( \frac{1+\Delta^{1/2}}{2} \right)} \right] - \operatorname{exerfc} \left[ \frac{b}{\gamma} t^{1/2} \left( \frac{1-\Delta^{1/2}}{2} \right) \right] \times \left[ \left( \frac{1-\Delta^{1/2}}{2\Delta^{1/2}} \right) + \frac{\sigma \cdot \gamma}{b^2} \cdot \frac{\varphi_0}{T_0} \cdot \frac{1}{\Delta^{1/2} \left( \frac{1-\Delta^{1/2}}{2} \right)} \right] - \frac{\varphi_0}{T_0 \cdot \varphi_1}. \quad (16)$$

Cette expression n'est valable que si  $\Delta \neq 1$ .

1.2. *Cas du contact thermique imparfait entre la sonde et le milieu semi-infini*. Dans le cas plus général du contact thermique imparfait entre la sonde et le milieu semi-infini, il existe un saut de température à l'interface sonde-milieu, et l'on peut définir une résistance thermique par unité de surface de contact,  $R_f$ , telle que:

$$R_f \cdot \psi = T(t) - \Theta(0, t). \quad (17)$$

L'équation (3), compte-tenu de (17) s'écrit:

$$T + R_f \cdot \varphi_f + \frac{1}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{\varphi_f(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0 \quad (18)$$

ce qui, compte-tenu de (4), conduit à la relation suivante:

$$T + \gamma \cdot R_f \cdot \frac{dT}{dt} - \sigma \cdot R_f \cdot \varphi_l + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT}{d\tau}$$

$$\times \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau - \frac{\sigma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{\varphi_l}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0. \quad (19)$$

L'équation (19) est l'équation caractéristique du touchau, dans le cas le plus général, c'est à dire en contact imparfait avec le milieu semi-infini à caractériser, et échangeant de l'énergie avec le milieu extérieur ambiant. Dans le cas particulier où ces échanges parasites sont négligeables ( $\varphi_l \simeq 0$ ), l'équation (19) se ramène à l'équation suivante :

$$T + \gamma \cdot R_f \frac{dT}{dt} + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT}{d\tau} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0. \quad (20)$$

Cette équation a été établie et résolue au moyen de la transformation de Laplace par Majka *et al.* [2]. La solution a pour expression, d'après [2] :

$$\theta(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha \cdot \text{exerfc}(\beta t^{1/2}) - \beta \cdot \text{exerfc}(\alpha t^{1/2})] \quad (21)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{2b \cdot R_f} \cdot \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4b^2 \cdot R_f}{\gamma} \right)^{1/2} \right]$$

et

$$\beta = \frac{1}{2b \cdot R_f} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{4b^2 \cdot R_f}{\gamma} \right)^{1/2} \right]. \quad (22)$$

2. *Généralisation de l'équation du touchau par introduction de la température corrigée de l'effet des pertes,  $T^*$ , et de la résistance fictive associée,  $R_f^*$*

2.1. *Définitions.* Dans le cas général correspondant à l'équation (19), on va effectuer le changement de variable suivant :

$$T^* = T - \frac{\sigma}{\gamma} \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau. \quad (23)$$

$T^*$  peut être définie comme la température corrigée des effets dus aux pertes thermiques. Elle vérifie la relation suivante :

$$\psi(t) = -\gamma \cdot \frac{dT^*}{dt}. \quad (24)$$

Les deux relations (23) et (24) sont équivalentes, compte-tenu de (4).

Les échanges thermiques entre la sonde et le milieu semi-infini, et le saut de température à l'interface, de  $T^*$  à  $\Theta(0, t)$ , définissent une résistance thermique par unité de surface, fictive,  $R_f^*$ , telle que :

$$\psi(t) \cdot R_f^* = T^*(t) - \Theta(0, t). \quad (25)$$

A partir de (17) et de (25), on peut écrire la relation entre la résistance fictive et la résistance réelle :

$$\psi(t) \cdot [R_f^* - R_f] = T^* - T$$

soit, compte-tenu de (23) :

$$R_f^* = R_f - \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau \quad (26)$$

ou encore :

$$R_f^* = R_f - \frac{1}{\left[ \sigma \cdot \varphi_l(t) - \gamma \cdot \frac{dT}{dt} \right]} \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \int_0^t \varphi_l(\tau) \cdot d\tau. \quad (27)$$

2.2. *Equation généralisée du touchau.* Exprimons dans l'équation (19) la variable  $T$  en fonction de la nouvelle variable,  $T^*$ . Il vient, compte-tenu de (24) :

$$T^* + \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau - \psi \cdot R_f + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT^*}{d\tau} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = 0 \quad (28)$$

Soit encore, compte-tenu de (24) et de (26) :

$$T^* + \gamma \cdot R_f^* \cdot \frac{dT^*}{dt} + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT^*}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = 0. \quad (29)$$

Dans le cas de la sonde avec pertes parasites, on voit que la température corrigée  $T^*$ , et la résistance thermique fictive,  $R_f^*$ , définies respectivement en (23) et en (27), vérifient l'équation (29) qui est identique à l'équation du touchau sans pertes parasites (20).

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas d'un contact parfait entre la sonde et le milieu, la résistance  $R_f$  tend vers zéro, sans que cela soit le cas de la résistance fictive,  $R_f^*$  :

$$R_f^* = -\frac{1}{\psi} \cdot \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau = -\frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \varphi_l(t) - \gamma \frac{dT}{dt}} \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Donc, pour le touchau en contact parfait avec le milieu, mais ayant des échanges parasites avec l'extérieur, tout se passe comme s'il existait une résistance thermique de contact  $R_f^*$ , non nulle, positive ou négative suivant le sens des échanges, et variant au cours du temps. Dans ce cas, l'utilisation de la température corrigée,  $T^*$ , dans l'équation (5), ne permet pas de se ramener à l'équation du touchau parfait, (6). Dans ce cas particulier, l'équation (26), compte-tenu de la relation (24), s'écrit :

$$R_f^* = \frac{\sigma}{\gamma^2} \cdot \left[ \frac{dT^*}{dt} \right]^{-1} \cdot \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau \quad (31)$$

d'où l'expression de (29) :

$$T^* + \frac{\sigma}{\gamma} \int_0^t \varphi_l(\tau) d\tau + \frac{\gamma}{b\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{dT^*}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = 0. \quad (32)$$

2.3. *Sens physique et intérêt des nouvelles grandeurs  $T^*$  et  $R_f^*$ .* La température  $T^*$  a été dénommée température corrigée des pertes. Elle est différente de la

température que prendrait la sonde s'il n'y avait pas de pertes. Ce n'est pas à proprement parler la température du touchau qui a été corrigée des pertes, mais sa dérivée. En effet, la relation (24) exprime seulement le fait que la variation d'enthalpie de la sonde correspondant à la variation de la température corrigée,  $T^*$ , est égale à l'énergie échangée par le touchau avec le milieu semi-infini.

La loi de température  $T^*(t)$  n'a donc ni sens physique, ni intérêt en soi. Il en est de même de la résistance thermique fictive qui lui est associée,  $R_f^*$ . Cependant, comme il va être montré à la suite, leur utilisation permet d'appliquer au touchau avec pertes une méthode d'interprétation du thermogramme, qui avait été initialement établie pour le touchau sans perte. Cette méthode conduit aux valeurs de l'effusivité thermique du milieu,  $b$ , et de la résistance thermique de contact entre le touchau et le milieu,  $R_f$ .

### 3. Détermination de l'effusivité dans le cas d'une sonde avec pertes

3.1. *Rappel sur la détermination de l'effusivité et de la résistance thermique de contact par la méthode de superposition globale de Vernotte.* Dans le cas de la sonde sans perte, Vernotte [1], a proposé une méthode globale de superposition qui permet, à partir du thermogramme  $T(t)$  du touchau, de déduire une valeur de l'effusivité  $b$  du milieu semi-infini et de la résistance par unité de surface de contact,  $R_f$ , caractérisant le contact thermique entre le touchau et ce milieu. On peut rappeler brièvement ici que cette méthode consiste à superposer la courbe expérimentale

$$\frac{T(0)}{T(t)} = f(\log t^{1/2})$$

et la courbe théorique  $F(u) = \operatorname{erfc}(u)$  tracée en fonction de  $\log(u)$ . Vernotte a montré que ces deux courbes sont superposables si  $R_f \cdot b^2/\gamma$  est petit, et qu'alors le décalage des origines des deux systèmes d'axes ayant respectivement les mêmes unités, a pour composante suivant l'axe des abscisses:  $\log(b/\gamma)$ ; et suivant l'axe des ordonnées:  $R_f \cdot b^2/\gamma$ . Il s'agit donc là d'une méthode graphique permettant de déduire les quantités  $b$  et  $R_f$ .

Il est important de noter que cette méthode n'est applicable que si l'effusivité du milieu est la même en tout point – milieu homogène – et la résistance thermique  $R_f$  constante pendant toute la durée de l'application de la sonde sur le milieu.

3.2. *Rappel sur la détermination de l'effusivité et de la résistance thermique apparentes par la méthode de superposition locale.* Cette méthode, dérivée de la précédente, a été proposée par Balageas [3]. Elle consiste à effectuer localement la superposition de la courbe expérimentale et de la courbe théorique, et à déduire ainsi pour chaque valeur du temps considérée un couple  $b$  et  $R_f$ . Le résultat de l'interprétation du thermogramme se présente alors sous la forme d'une loi d'effusivité apparente,  $b(t)$ , et d'une loi de résistance thermique de contact apparente,  $R_f(t)$ . Si le milieu est

homogène, semi-infini, et si le contact thermique est invariable pendant la durée de l'application de la sonde, les deux lois se réduisent à

$$b(t) = b = \text{constante}$$

$$R_f(t) = R_f = \text{constante}$$

et les deux méthodes, globale et locale, conduisent au même résultat. Ceci a été vérifié expérimentalement par Bransier, [4].

L'intérêt de cette méthode est double: (i) elle permet d'interpréter une expérience pendant laquelle la résistance thermique de contact a varié, (ii) elle permet d'interpréter une expérience sur un milieu semi-infini non homogène présentant une distribution spatiale des propriétés thermophysiques du type  $k = k(x)$  et  $C_p = C_p(x)$ ,  $x$  étant la distance au plan délimitant le milieu semi-infini.

Dans le dernier cas, il existe un lien entre la loi d'effusivité apparente,  $b(t)$ , et la distribution spatiale des propriétés thermophysiques dans le milieu,  $a(x)$  et  $b(x)$ . Le passage de la loi  $b(t)$  à la loi  $b(x)$  n'est possible que dans les cas suivants: (i) on connaît expérimentalement l'évolution de la température en un point intérieur du milieu semi-infini. Dans ce cas on perd le principal avantage de la méthode, qui est d'être non intrusive, qualité particulièrement appréciée pour les applications bio-médicales; (ii) il existe une relation entre l'effusivité et la diffusivité thermique du milieu. Ce type de relation existe en particulier dans le cas d'un matériau à porosité variable dans l'épaisseur; (iii) une des propriétés thermophysiques, la chaleur volumique par exemple, est pratiquement constante.

3.3. *Détermination de l'effusivité thermique et de la résistance thermique dans le cas d'un touchau avec déperditions.* Il a été montré plus haut que, dans le cas le plus général d'une sonde en contact thermique parfait ou imparfait avec un milieu semi-infini et avec des déperditions, l'équation régissant la température de la sonde sans déperdition, en contact imparfait avec le milieu (20), était encore applicable, à condition de remplacer la température réelle de la sonde,  $T$ , par une température corrigée,  $T^*$ , définie par la relation (23), et la résistance thermique de contact par unité de surface,  $R_f$ , par une résistance fictive,  $R_f^*$ , définie par la relation (27).

La seconde méthode d'interprétation du thermogramme, dite "méthode de superposition locale", applicable à la loi de température  $T(t)$  d'une sonde sans perte, en contact imparfait et variable avec un milieu semi-infini, doit s'appliquer également à la loi de température corrigée  $T^*(t)$  d'une sonde avec pertes, puisque  $T(t)$  et  $T^*(t)$  vérifient la même équation (20) ou (29). La première méthode, dite "méthode de superposition globale", ne peut s'appliquer dans ce cas, puisque la résistance fictive,  $R_f^*(t)$ , varie constamment, alors que cette méthode suppose précisément la constance de la résistance thermique caractérisant le contact de la sonde avec le milieu semi-infini sur lequel elle est appliquée.

L'utilisation de la température corrigée accroît

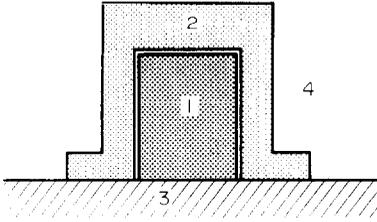


FIG. 2. Schéma de principe du touchau avec pièce de garde passive: 1, élément de mesure; 2, anneau de garde; 3, milieu semi-infini; 4, milieu ambiant.

l'intérêt de la méthode car, d'une part, elle améliore la précision de la mesure par la prise en compte du phénomène quasi inévitable d'échanges parasites par les faces latérales et arrières de l'élément de mesure, et d'autre part, la complexité accrue du traitement mathématique du thermogramme permet en contrepartie certaines simplifications dans la conception des sondes, notamment dans celle des sondes miniaturisées, le système de garde active n'étant plus nécessaire. Sur le plan expérimental, la méthode nécessite la mesure ou l'évaluation indirecte des pertes,  $\varphi_l(t)$ , pendant toute la durée de l'expérience, alors que le traitement du touchau sans perte ne requiert que la connaissance de la loi  $T(t)$ .

3.4. Exemples d'application de la méthode. Les exemples d'application de la méthode proposés à la suite ont tous trait à des sondes munies d'anneau de garde. La configuration type optimale est présentée sur la Fig. 2. La forme et les dimensions des deux pièces sont telles qu'elles ont le même  $\gamma$ . L'anneau de garde a pour but, d'une part de repousser les effets de bords à l'intérieur du milieu semi-infini loin de la zone de mesure, d'autre part, d'isoler la pièce centrale de mesure du milieu ambiant. Cependant l'isolement entre les deux pièces n'est jamais parfait. Aussi, les effets de bords et les échanges avec le milieu ambiant perturbent-ils la mesure. Ces perturbations sont d'autant plus impor-

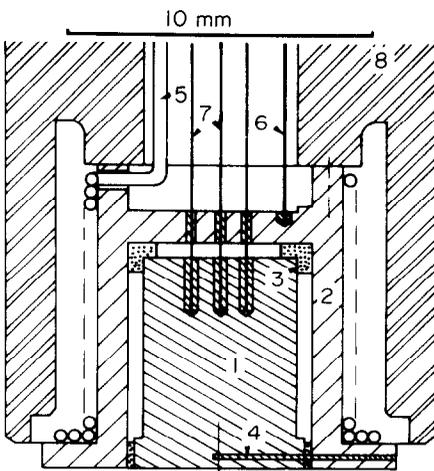


FIG. 3. Touchau médical à anneau de garde actif: 1, élément de mesure; 2, anneau de garde; 3, coins isolants; 4, 6, thermocouple différentiel; 5, enroulement chauffant; 7, thermocouple de mesure; 8, corps de la sonde stylo.

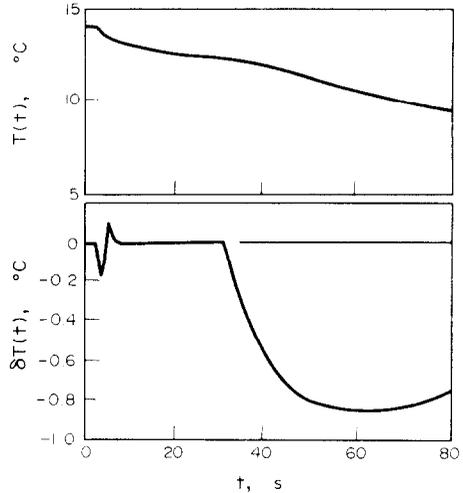


FIG. 4. Application de la sonde asservie sur un échantillon de plexiglas. L'asservissement est coupé au temps 25 s. En haut: évolution de la température  $T$ , en bas: évolution de l'écart de température entre la pièce de mesure et l'anneau de garde,  $\delta T$ . La sonde est caractérisée par les paramètres constructifs suivants:  $\gamma = 20000 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\sigma = 5,34$ ,  $R_l = 3,9 \cdot 10^{-4} ^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ .

tantes que le milieu semi-infini est bon conducteur, que la sonde est miniaturisée, et qu'enfin, la durée de la mesure est importante. Il s'agit là de conditions que l'on trouve réunies dans le cas d'une application de la méthode du touchau qui a donné lieu récemment aux développements les plus prometteurs: la mesure de l'effusivité thermique des tissus vivants [5-9].

Afin de pallier à ces inconvénients, une sonde stylo avec anneau de garde actif a été réalisée, [5]. L'anneau de garde est muni d'un enroulement chauffant et d'un thermocouple différentiel permettant d'asservir la différence de température entre les deux pièces,  $\delta T$ , à une valeur de consigne assurant un isolement satisfaisant (voir Fig. 3). La complexité d'une telle sonde en rend le coût élevé. La méthode présentée plus haut permet de faire des mesures aussi précises sans le système d'asservissement. La fig. 4 présente le thermo-

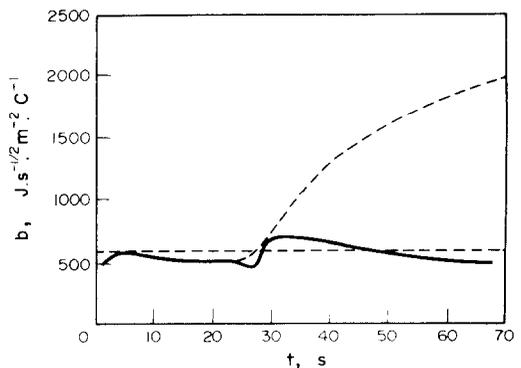


FIG. 5. Application de la méthode de la température corrigée,  $T^*$ , au cas de la mesure pendant laquelle l'asservissement a été coupé (Fig. 4) — — —, exploitation du thermogramme  $T(t)$ ; — — —, exploitation du thermogramme corrigé  $T^*(t)$ ; — · — ·, valeur de l'effusivité du plexiglas.

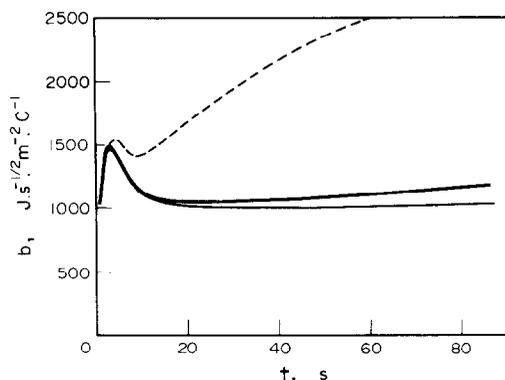


FIG. 6. Effusivité apparente mesurée sur la face interne de l'avant-bras à l'aide de la sonde à anneau de garde actif. —, fonctionnement en sonde chaude avec anneau de garde asservi; — — —, fonctionnement en sonde froide avec anneau de garde non asservi: exploitation du thermogramme  $T(t)$ ; — — —, *idem*: exploitation du thermogramme corrigé  $T^*(t)$ .

gramme  $T(t)$  ainsi que la différence de température  $\delta T(t)$  pendant une application de la sonde sur un échantillon de plexiglas. Au temps  $t = 25$  s l'asservissement est coupé. Les échanges entre les deux pièces prennent aussitôt de l'importance et le thermogramme est très fortement perturbé. La Fig. 5 présente la loi d'effusivité apparente  $b(t)$  calculée par la méthode de superposition locale à partir du thermogramme  $T(t)$ . La mesure est correcte jusqu'au moment où l'asservissement est coupé. Elle est ensuite erronée, les valeurs s'écartant progressivement de la valeur correcte qui est égale à  $600 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1/2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ . La résistance thermique par unité de surface d'échange entre les deux pièces,  $R_i$ , ayant été déterminée expérimentalement par ailleurs, la connaissance de la loi  $\delta T(t)$  permet de calculer  $\varphi_i(t)$ , et donc la température corrigée  $T^*(t)$  [formule (23)]. La méthode de superposition locale appliquée au thermogramme corrigé,  $T^*(t)$ , conduit à la loi d'effusivité présentée sur la même figure en trait plein. L'effusivité mesurée reste voisine de la valeur nominale, même après l'arrêt de l'asservissement, démontrant ainsi l'efficacité de la méthode.

La même sonde a été utilisée pour caractériser la

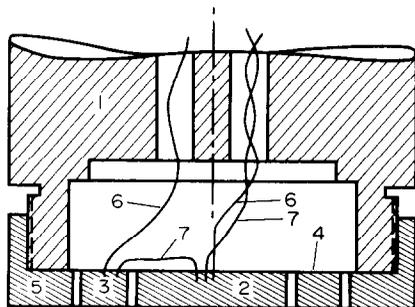


FIG. 7. Sonde simplifiée à double anneau de garde passif: 1, corps de la sonde en plexiglas; 2, élément de mesure en cuivre; 3, premier anneau de garde en cuivre; 4, disque de mylar sur lequel sont collés l'élément de mesure et le premier anneau de garde; 5, second anneau de garde en aluminium; 6, fils de chromel; 7, fils d'alumel.

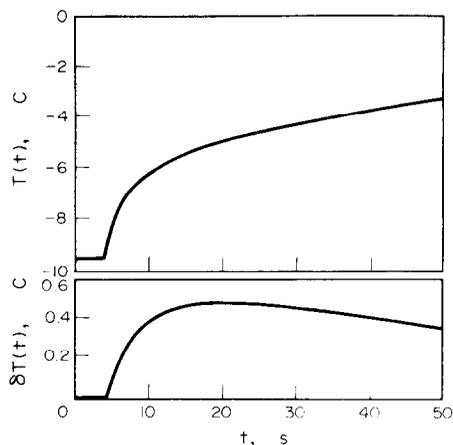


FIG. 8. Application de la sonde à double anneau de garde passif sur la face interne de l'avant-bras. Evolution de la température de l'élément de mesure,  $T$ , et de l'écart de température entre celui-ci et l'anneau de garde,  $\delta T$ . Les paramètres constructifs de la sonde sont:  $\gamma = 6800 \text{ J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\sigma = 2$ ,  $R_i = 0,01^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ .

peau au niveau de la face interne de l'avant-bras, dans les conditions suivantes: (i) première mesure: la sonde est plus chaude que la peau, et son anneau de garde est asservi; (ii) seconde mesure: la sonde est à la température ambiante, donc plus froide que la peau, l'anneau de garde ne peut pas être asservi en température.

Les lois d'effusivité apparente obtenues à partir de ces deux mesures sont confrontées sur la Fig. 6. Elles sont quasiment identiques, ce qui montre d'une part l'efficacité de la méthode utilisant le thermogramme corrigé  $T^*(t)$ , et d'autre part la non perturbation de l'état circulatoire des tissus vivants par le signal thermique créé par la sonde. A titre de comparaison, la loi d'effusivité obtenue avec la sonde froide non asservie et sans tenir compte des pertes est également présentée en trait pointillé.

Le dernier exemple d'utilisation de la méthode a trait à une sonde plus rustique à anneau de garde passif dont le schéma est donné sur la Fig. 7. La mesure a été effectuée sur le même patient, au même emplacement. La sonde est initialement à température ambiante. Le

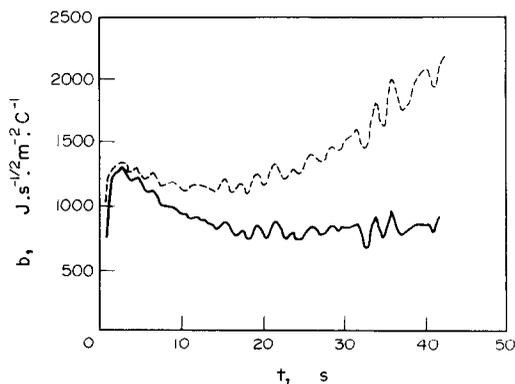


FIG. 9. Effusivité apparente mesurée sur la face interne de l'avant-bras à l'aide de la sonde à double anneau de garde passif: — — —, exploitation du thermogramme brut  $T(t)$ ; —, exploitation du thermogramme corrigé,  $T^*(t)$ .

thermogramme  $T(t)$  et la différence de température  $\delta T(t)$  entre la pièce centrale de mesure et la pièce de garde sont présentés sur la Fig. 8. Les lois d'effusivité obtenues à partir du thermogramme brut,  $T(t)$ , et du thermogramme corrigé,  $T^*(t)$ , sont confrontées sur la Fig. 9. Seule la seconde est correcte et tout à fait comparable à celles obtenues avec l'autre sonde fonctionnant avec ou sans asservissement.

#### CONCLUSION

La prise en compte des échanges thermiques entre la sonde et le milieu extérieur ou l'anneau de garde a été réalisée par l'utilisation d'une température corrigée,  $T^* = T^*(T, \varphi_l)$ , et d'une résistance thermique fictive associée,  $R_f^* = R_f^*(R_f, T, \varphi_l)$ . Le fait que ces deux grandeurs vérifient l'équation du touchau sans perte permet de leur appliquer la méthode des coïncidences locales. La vérification expérimentale a été faite et a permis de montrer que la mesure de l'effusivité était rendue plus précise.

Dans le domaine biomédical cette méthode a été mise en oeuvre et a notamment permis de réaliser des mesures d'effusivité avec une même sonde fonctionnant successivement en sonde chaude avec garde active et en sonde froide avec garde passive. Dans ce dernier cas les pertes latérales étaient importantes. La similitude des courbes d'effusivité obtenues permet de conclure, d'une part en l'intérêt de la méthode, d'autre part dans le fait que l'état de la microcirculation sous-cutanée n'a pas le temps d'être modifiée par le signal thermique créé par la sonde pour effectuer la mesure.

L'ensemble des mesures réalisées permet de conclure

en la possibilité d'utiliser des sondes miniaturisées plus simples que celles jusqu'ici réalisées par suppression de l'asservissement en température de l'anneau de garde.

#### REFERENCES

1. P. Vernotte, La mesure du coefficient d'arrachement thermique des isolants par la méthode du touchau, *Cha. Ind.* **208**, 331–338 (1937).
2. M. Majka, J. Martinet, C. Martin et R. Berlot, A propos de la méthode du touchau, *Revue Gén. Thermique* **87**, 251–261 (1969).
3. D. Balageas et J. Jamet, Mesure de l'effusivité par un appareil du type touchau, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 933–940 (1975).
4. J. Bransier, Sur le rôle de l'effusivité dans les contacts thermiques brefs, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 727–738 (1974).
5. D. Balageas, J. Jamet, M. Gautherie et Y. Quenneville, Effusivité thermique tissulaire cutanée *in vivo*: technique de mesure et tissus normaux, *Colloque Int. Capteurs biomédicaux*, Paris, 3–7 novembre (1975).
6. D. Balageas, A. Dittmar, R. Gongora, P. Jockey, J. Marichy et D. Ory, Caractérisation thermique des tissus vivants superficiels ayant subi différents types d'agression, *IX<sup>e</sup> Congrès Int. Soc. Française Radioprotection*, Nainville-les-Roches, 22–26 mai (1978).
7. J. Marichy, A. Dittmar, J. Ceyrat, D. Balageas et D. Ory, L'effusivité thermique de la peau greffée, *Les Annales de Chirurgie Plastique et Reconstructive*, à paraître (1979).
8. A. Dittmar, J. Marichy, D. Balageas, D. Ory et A. Birer, Thermal effusivity of burnt skin, in *Fifth Int. Conf. on Burn Injuries*, Stockholm, June 18–23 (1978).
9. J. Marichy, A. Dittmar, J. Ceyrat, D. Balageas et D. Ory, Thermal effusivity of grafted skin, *Annual Meeting American Burn Association*, New-Orleans, 15–17 March (1979).

#### GENERALIZED EQUATION OF TOUCHAU-TYPE EFFUSIMETER. IMPROVEMENT OF THE MEASURING METHOD FOR THERMAL EFFUSIVITY (THERMAL INERTIA)

**Abstract**—The most commonly used measuring method for thermal effusivity—or thermal inertia—is the Touchau method. A generalization of the theory on which this method is based is proposed which takes into account the heat losses between the sensor and the ambient medium. The modified Touchau method described in a previous paper and using local coincidence, may be applied with greater accuracy. The use of rugged miniaturized probes is made possible by the new method.

In the biomedical field, this novel method shows that the measurement of live skin effusivity can be performed without disturbing the local subcutaneous blood circulation.

#### VERALLGEMEINERTE GLEICHUNG DES TOUCHAU-EFFUSIVITÄTSMESSERS. VERBESSERUNG DES MEßVERFAHRENS FÜR THERMISCHE EFFUSIVITÄT

**Zusammenfassung**—Das meist verwendete Meßverfahren für die thermische Effusivität—oder thermische Trägheit—ist die Touchau-Methode. Eine Verallgemeinerung der Theorie auf der diese Methode beruht wird vorgeschlagen. Die bestehenden thermischen Übergänge zwischen der Sonde und die Umwelt sind nicht mehr vernachlässigt. Unter diesen Bedingungen, kann die Touchau-Methode, die schon durch die Benützung der lokalen Koïnzenzen modifiziert wurde, dann mit erhöhter Genauigkeit angewendet werden. Die Verwendung von relativ einfachen Miniatursonden wird möglich gemacht.

Im biomedizinischen Bereich, erlaubt die neue Methode zu zeigen, daß bei der Messung der Effusivität der lebenden Haut, der subkutane Blutkreislauf durch das thermische Signal der Sonde nicht gestört wird.

**ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТУШО. УЛУЧШЕНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ  
ТЕРМИЧЕСКОЙ ЭФФУЗИВНОСТИ**

**Аннотация** — Наиболее употребленным методом измерения термической эффузивности (термической инерции) является метод Тушо. Предложено обобщение теории на которой лежит этот метод. Теплопередача между зондом и окружающей средой больше не пренебрежена. В этих условиях, метод Тушо, уже изменяемый использованием локальных совпадений, можно использовать с повышенной точностью. Использование относительно простых миниатюрных зондов сделано возможным. В биомедицинской области, новый метод позволил показать, что при измерении эффузивности живой кожи подкожное кровообращение не нарушено термическим сигналом зонда.